

57. Bestimmen Sie geschlossene Ausdrücke für

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

58. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0.$$

59. Es seien S und C zwei reelle auf ganz \mathbb{R} definierte Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} S(x+y) &= S(x)C(y) + C(x)S(y), \\ C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C(x) - 1}{x} &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie S und C .

60. Zeigen Sie:

a) Für $x, y > 0$ und $a > 1$ ist $\frac{\log_a x + \log_a y}{2} \leq \log_a \frac{x+y}{2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

61. (a) Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^q}{n!}$$

für $q = 4$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Summe für $q \in \mathbb{N}_0$ ein ganzzahliges Vielfaches von e ist.